Cómo referenciar este artículo / How to reference this article
Montiel Hernández, M. (2017). Un experimento piloto sobre la enseñanza interdisciplinaria integrada a nivel universitario: matemáticas y música. *Foro de Educación*, 15(22), 1-30. doi: http://dx.doi.org/10.14516/fde.532

Un experimento piloto sobre la enseñanza interdisciplinaria integrada a nivel universitario: matemáticas y música

A pilot experiment in integrated interdisciplinary teaching at the university level: mathematics and music

Mariana Montiel Hernández
e-mail: mmontiel@gsu.edu
Universidad Estatal de Georgia. Estados Unidos

Resumen: En el presente trabajo se presenta un reporte y un análisis de una experiencia interdisciplinaria que se llevó a cabo a través de un programa especial de fomento a modelos de esta naturaleza. La propuesta de colaboración entre los cursos *Análisis Postonal* de la Escuela de Música de la Universidad Estatal de Georgia (GSU) en los Estados Unidos y *Teoría Matemática de la Música* del Departamento de Matemáticas y Estadística de la misma universidad, fue seleccionada en un concurso sobre el tema de enseñanza interdisciplinaria integrada por parejas. Este artículo consiste en una revisión de algunos antecedentes documentados de esta combinación particular a nivel universitario, una descripción de los contenidos de los dos cursos y de los participantes en este modelo piloto, así como en un análisis de datos recopilados al final del curso. Una entrevista colectiva fue videograbada y el análisis de la información en general fue llevado a cabo de acuerdo con un marco conceptual adaptado a esta combinación novedosa de disciplinas. Se buscó en todo momento que el análisis y las conclusiones se circunscribiesen a parámetros concretos para poder detectar, si fuera el caso, las características precisas de la colaboración que contribuyeran al realce de los procesos de aprendizaje y enseñanza en ambas disciplinas.

Palabras claves: matemáticas y música; análisis postonal; teoría musical de conjuntos; teoría de grupos; enfoque ontosemiótico.

Abstract: In the present work a report and an analysis of an interdisciplinary experience that was carried out under a special program to encourage the development of pilot projects with this character is presented. The proposal for the collaboration between the courses *Postonal Analysis* at the School of Music of Georgia State University (GSU) in the United States and *Mathematical Music Theory* at the Department of Mathematics and Statistics from the same university, was selected in a competition whose subject was interdisciplinary and integrated course pairing. This article consists of a presentation of some documented antecedents of this particular combination at the university level, a description of the content of both courses and the participants in this pilot, as well as an analysis of data gathered at the end of the course. A group interview was video – recorded and the general analysis of the information was carried out by means of a conceptual framework adapted to the novel combination of these disciplines. The aim was that the analysis and the conclusions could be circumscribed to concrete parameters to be able to detect, if it was the case, the precise characteristics of the collaboration that contributed to the enhancement of the processes of teaching and learning in both disciplines.

Key words: mathematics and music; postonal analysis; musical set theory; group theory; ontosemiotic approach.

Recibido / Received: 26/08/2016
Aceptado / Accepted: 06/11/2016

1. Introducción

La relación entre las matemáticas y la música tiene un largo trayecto que, habitualmente, se traza desde los tiempos de Pitágoras y su pregunta seminal entorno a la relación entre la consonancia y los enteros pequeños. El *Quadrivium,* que era el plan de estudios de occidente desde la antigüedad hasta el renacimiento, consistía en cuatro artes liberales, a saber: la aritmética (el número), la geometría, la música y la astronomía. La geometría se consideraba como el estudio del número en el espacio, la música era el número en el tiempo y la astronomía era el número en el espacio y el tiempo.

Aspectos de variación, similitud, enumeración y clasificación de estructuras musicales nunca dejaron de intrigar tanto a músicos como a matemáticos. Sin embargo, en los tiempos modernos las dos áreas vivieron un alejamiento en las instituciones educativas a todos los niveles y, en particular, al nivel superior. Recientemente, con el advenimiento de un área de investigación, pedagogía y divulgación conocida como la *teoría matemática de la música,* se ha experimentado un acercamiento institucional entre profesores y estudiantes de ambas disciplinas (Kovachi, 2014; Hall, 2014; Hughes, 2014; Johnson, 2008). De hecho, la teoría matemática de la música como disciplina se construye sobre las relaciones y las estructuras comunes a ambos componentes; dichas relaciones y estructuras pueden analizarse con fines orientados a la enseñanza y el aprendizaje (Bensen, 2006; Johnson, 2008; Fiore, 2006; Fiore, 2007; Fiore, 2009).

Este fenómeno es lógico dado que se pueden encontrar modelos matemáticos para casi todos los niveles de actividad musical, desde la composición hasta la producción de sonido por medios tradicionales o digitales. La teoría matemática de la música moderna ha incorporado, progresivamente, más y más contenido matemático en el transcurso de las últimas décadas. Durante los últimos cuarenta años aproximadamente, la teoría matemática de la música ha surgido de manera natural en varios departamentos, facultades y escuelas de música y matemáticas en los Estados Unidos, Europa y América Latina. En las escuelas de música surgió la necesidad de analizar los patrones inherentes a la composición contemporánea, los cuales no podían describirse a través de las herramientas de la teoría musical tradicional. Dicha necesidad motivó el desarrollo de la teoría musical de conjuntos, donde el uso de la teoría de grupos y otras estructuras matemáticas modernas es tan habitual como la aplicación del cálculo en las facultades de ingeniería o química. Por otro lado, los matemáticos han encontrado relaciones sorprendentes en el contexto de las matemáticas aplicadas a estructuras musicales que han llevado a problemas abiertos interesantes (Andreatta, 2012).

2. Objetivos

El presente trabajo pretende:

- *Aportar un panorama, forzosamente parcial, de diferentes antecedentes de cursos interdisciplinarios de matemáticas y música a nivel universitario*. Cabe mencionar que la motivación de la interdisciplinariedad varía; mientras que a nivel de las escuelas de música profesionales las matemáticas se enseñan como un medio sujeto al fin musical (sea el análisis, la composición, etc.), a nivel de los departamentos y facultades de matemáticas, la música puede llegar a ser un medio a través del cual se realza el estudio de las matemáticas y la ejemplificación de las ideas abstractas. Asimismo, como se verá en la sección de antecedentes, estos cursos interdisciplinarios han sido implementados con éxito a nivel del tronco común, especialmente en la modalidad de las pequeñas universidades de ciencias y humanidades, conocidas como *colegios universitarios de artes liberales* (*liberal arts colleges*).
- Reportar sobre *la enseñanza interdisciplinaria integrada*, un experimento en el cual se integran dos cursos de diferentes disciplinas, con el afán de complementar y dar profundidad a cada curso por medio del conocimiento de la otra disciplina. A la vez, dicho experimento está diseñado para arrojar ventajas prácticas, en el sentido de obtener créditos por dos cursos en el tiempo de aula de uno solo. Dicho experimento piloto fue llevado a cabo con el lineamiento explícito de tomar dos materias, una del departamento de matemáticas y la otra de la escuela de música, y enseñarlas conjuntamente a estudiantes de ambas disciplinas.
- Dar a conocer *la metodología* empleada para recopilar información así como *el método de análisis* que se utilizó en la investigación formal de los resultados del experimento, sobre todo en lo referente al impacto que tuvo en los estudiantes involucrados.
- Ilustrar y contestar las preguntas de investigación con algunos *resultados del experimento pedagógico*, en particular, con los proyectos finales de ciertos estudiantes seleccionados. Dicho proyecto final consistió en una composición musical en el estilo postonal con los respectivos análisis

musicales y matemáticos, los cuales se presentan de manera sintetizada en este artículo.

- Presentar *conclusiones* que abarquen, en primer lugar, las bondades o inconvenientes pedagógicos de la enseñanza interdisciplinaria integrada en el contexto dado de la teoría matemática de la música y el análisis postonal. Asimismo se pretende plantear preguntas genéricas en torno al modelo, tales como la factibilidad de su generalización.

3. Antecedentes

En julio de 2014 la *Journal of Mathematics and Music* (JMM), la revista de la Sociedad para Matemáticas y Computación en la Música (SMCM), publicó una edición especial sobre las pedagogías de la teoría matemática de la música. La edición especial consistió en 6 artículos (Kovachi, 2014; Hall, 2014; Hughes, 2014; Montiel & Gómez, 2014; Noll, 2014; Peck, 2014) que cubrieron una gama de temas, enfoques y contextos para la realización de dicha enseñanza. Kovachi (2014), profesor en una universidad pequeña de humanidades y ciencias (*liberal arts college*) donde la unidad del conocimiento, independientemente del área de estudio particular, es la filosofía predominante, describió un curso que llevó a cabo. Dicha descripción incluyó su filosofía pedagógica y de investigador en lo tocante a la unión de las matemáticas y la música, la calendarización que implementó para la presentación de los temas así como las actividades que realizó con sus estudiantes. Se hizo énfasis en el uso de las matemáticas para retomar el concepto de *música especulativa* y para profundizar en la comprensión del aspecto cerebral y científico de la música, así como su vínculo con otras ciencias. Se incluyeron, entre los temas, conceptos básicos de la acústica musical, de las geometrías musicales y de la teoría de grupos para poder estudiar la regularidad máxima, una noción usada en la teoría de escalas y del ritmo y que, acuñada en el contexto de la teoría matemática de la música, ha resultado ser útil en otras áreas como la física y, en particular, el modelo Ising unidimensional (Douthett & Krantz, 2007).

Hall (2014) enseña un curso de matemáticas y música diseñado para estudiantes universitarios de una gran variedad de concentraciones y antecedentes académicos. Este curso, llamado «El número que suena: matemáticas y músicas de los tiempos antiguos a la época moderna» (*Sounding Numbers: Music and Mathematics from Ancient to Modern Times*), es para una población que, en su mayoría, no tiene prerrequisitos específicos. Ella explicó que, con unas modificaciones, el curso también podría servir para el nivel de bachillerato o para estudiantes más avanzados en las áreas de informática, matemáticas y física. Este

Foro de Educación, v. 15, n. 22, enero-junio / january-june 2017, pp. 1-23.
e-ISSN: 1698-7802

curso ya es parte del currículo de su universidad, una institución que también posee una fuerte orientación hacia la formación en las artes liberales antes de especializarse. Hall describió varios de los experimentos que realizaron los estudiantes utilizando software de grabación de audio. Hughes (2014) describió su experiencia en un curso diseñado para estudiantes sobresalientes, también de la etapa de tronco común y, de igual manera, en una pequeña universidad de artes liberales. Este profesor, en su programa, presenta seis experiencias creativas en torno a los temas de la transcripción, la acústica, el análisis musical, la afinación, la composición y el servicio, este último refiriéndose al hecho de que sus estudiantes preparasen una clase para impartir en un instituto de bachillerato local. En la unidad sobre la transcripción musical Hughes relaciona la notación musical al plano Cartesiano, con tiempo y altura de tono como los ejes. En las unidades en torno a la acústica, la afinación y el análisis, después de lecturas y ejercicios preparados, se ofrece una variedad de alternativas para la «experiencia creativa», dependiendo de la formación e intereses de los alumnos. Cabe mencionar que la revista tiene un componente en línea donde los autores frecuentemente suben materiales suplementarios y de audio.

Otro antecedente que no debe quedar sin mencionarse es el de los programas de *matemáticas en todas las* áreas del currículo (*Mathematics Across the Curriculum*) patrocinados por la Fundación Nacional de las Ciencias (NSF) de los Estados Unidos. En particular, la implementación en universidades tales como Dartmouth College (Wallace, 2000), Mt Holyoke College, así como los materiales que han hecho disponibles para el gran público (Dartmouth College, 2002), muestran que este enfoque interdisciplinario que busca implicar las matemáticas con las humanidades puede ser muy exitoso. Su programa respondía a una pregunta muy básica, a saber: ¿Qué clase de matemáticas necesita un estudiante universitario? Asimismo, se partía de la idea de que al expandir la accesibilidad del rango de tópicos matemáticos al estudiante universitario, se podría incrementar su interés en las matemáticas y, a la vez, tratar simultáneamente con los alumnos poseedores de una cierta sofisticación matemática y con los de menos formación.

No debe dejar de incluirse en esta reseña el trabajo que se realiza en la Escuela de Música de la Universidad de Minnesota, EE. UU. Aunque en el área de la teoría matemática de la música se dan casos de músicos que también tuvieron formación matemática en alguna etapa de sus estudios, en esta escuela contrataron a un matemático que, aun y cuando fue el pionero de la teoría matemática de la música en Europa, según especializaciones y criterios académicos habituales no sería acogido en una escuela de música. Así es que se han implementado varios cursos en esta escuela de música que ilustran cómo los músicos pueden acercarse a las matemáticas de un buen nivel de sofisticación y, en consecuencia, emplearlas para una comprensión más completa de su campo (Mazzola, 2016). Los cursos ofrecidos desde 2007 tienen títulos tales como: *Matemáticas básicas para los teóricos musicales, el diseño matemático de la música futura* y *cómo escribir un libro científico de la música*, en que los mismos estudiantes escribieron un texto para cursos futuros con esta temática.

En la universidad de Yale el profesor Cohn y su estudiante doctoral (Cohn, 2016; Jones, 2016) de la escuela de música han implementado un curso interdisciplinario para estudiantes de licenciatura. La justificación que ellos esgrimen estriba en que tanto las matemáticas como la teoría musical presentan un desafío al estudiante, ya que ambas exigen que éstos formalicen sus intuiciones a través de una terminología y unos conceptos que les son ajenos. Estos profesores intentan construir una pedagogía interdisciplinaria que cruce la frontera entre ambas disciplinas y en que, por un lado, se empleen las intuiciones musicales para ejemplificar aspectos de la matemática formal y, por otro, se usen conceptos matemáticos, tanto intuitivos como formales, para describir y definir relaciones complejas de la teoría musical.

> El curso une conceptos básicos de la aritmética modular, la teoría de grafos, la geometría y la topología con sus representaciones en el ámbito de la teoría musical. Las escalas musicales y sus ciclos se emparejan con la aritmética modular, la cual sirve para extender las intuiciones cíclicas al dominio del ritmo. Los acordes pueden vestirse de objetos armónicos embebidos en grafos y espacios geométricos, lo cual motiva la investigación de relaciones que son diferentes de las usuales tratadas en la teoría musical. Asimismo, los términos y construcciones de la teoría de grafos y la geometría permiten que los alumnos formalicen la comprensión de armonías extendidas y progresiones novedosas (Jones, 2015).

Los profesores están en el proceso de escribir un libro de texto en que la meta es crear un vocabulario que sirva para describir los patrones de la relación entre los objetos musicales y matemáticos. A propósito de textos, también es importante mencionar el libro de texto del profesor Johnson de Ithaca College (Johnson, 2008). De hecho, este texto fue utilizado en el programa de *matemáticas en todas las áreas del currículo* patrocinado por la NSF, mencionado arriba, así como en varios cursos en Ithaca College, cuyo carácter de universidad pequeña de ciencias y humanidades se presta mucho a este tipo de experimento interdisciplinario (Johnson, 2013). Lo interesante de este texto y su programa de estudios es el hecho de que tome el contenido y los resultados de las investigaciones recientes, sólo accesibles en artículos y otros documentos especializados, y los presente de tal forma que sean comprensibles para el estudiante medio cuya formación en las dos disciplinas es incipiente. El autor relaciona conceptos de la teoría diatónica de conjuntos con el estudio de aspectos básicos de la música a través de muchos ejercicios que van acercando el alumno a las investigaciones de actualidad en el área. Dichos ejercicios fuerzan al alumno a realmente hacer cálculos y precisar las propiedades específicas del diatonismo, en contraposición al cromatismo, por medio de este enfoque práctico, aportándole una manera activa y tangible de entrar en la abstracción del análisis de los fenómenos musicales y de la percepción musical. Por otro lado, los ejercicios sirven para formular conjeturas de naturaleza matemática para explicar los fenómenos como:

1. *Las particiones*, o el hecho de que cada especie de acordes pertenezca solamente a un único género de acordes.
2. *La cardinalidad es igual a la variedad*, una propiedad que implica que cada género de acordes compone un número de especies que es igual a la cardinalidad del acorde.
3. *La estructura arroja multiplicidad,* que muestra que dentro de un género en particular el número de acordes en cada especie se puede inferir directamente de las estructuras genéricas (Johnson, 2008; Clough & Myerson, 1985).

Finalmente, los antecedentes inmediatos al experimento piloto de enseñanza interdisciplinaria integrada, tema del presente trabajo, se llevaron a cabo en la Universidad Estatal de Georgia (GSU). En junio de 2013 se implementó un taller en torno a la modelización matemática para maestros de nivel secundario y de bachillerato. La mitad del desarrollo de dicho taller se empleó en el entrenamiento de los profesores en el uso de la música, en particular del ritmo, como un contexto para la transmisión de conceptos matemáticos concordantes con los estándares oficiales que deben cumplirse a ese nivel. La meta del programa era enganchar a los maestros en actividades de modelización matemática con el propósito de que ellos, a su turno, pudiesen transmitir este aprendizaje a través de su enseñanza en el aula (Chahine & Montiel, 2015). Cabe mencionar que la mayoría de las bases teóricas e ideas para las conexiones entre las matemáticas y el ritmo musical que se implementaron en el taller han sido expuestas por académicos interesados en este tema (Demaine *et al.*, 2009; Gómez, 2016; Toussaint, 2013).

Los temas que se incluyeron en el taller eran:

1. El lema de Euclides y el algoritmo de Euclides, la regularidad máxima y los ritmos Euclidianos.
2. El análisis geométrico de los ritmos cíclicos.
3. Permutaciones cíclicas y *Clapping Music* de Steve Reich.

Como muestra del alcance de estas ideas tomemos la primera categoría, la cual se desarrolló en torno al teorema del residuo y el algoritmo de Euclides. A través del trabajo con ritmos se llegó a la formalización de ciertas ideas y técnicas que se imparten a nivel secundario, donde se generalizan las aplicaciones aritméticas a las algebraicas, por ejemplo, a los polinomios. Asimismo, este tema juega un papel importante en el álgebra abstracta para los estudiantes que eventualmente estudiarán matemáticas a nivel universitario y, también, tiene una presencia significativa en la enseñanza de los lenguajes de programación.

El segundo antecedente fue la implementación de un curso de la teoría matemática de la música para un grupo de estudiantes del Departamento de Matemáticas y Estadística y de la Escuela de Música de GSU que viajaron a la Universidad de Ciencia y Tecnología de China del Este (ECUST por sus siglas en inglés) en mayo de 2014, donde se integraron con los alumnos locales, todos estudiantes de matemáticas, para estudiar el tema. El enlace a una exposición divulgativa de los estudiantes de GSU acerca de los diferentes temas que se cubrieron, la cual fue ofrecida en una sesión del club de matemáticas de GSU en octubre de 2014, puede encontrarse en las referencias (Montiel, 2016).El curso consistió, primero, en una serie de clases magistrales y, segundo, en dos sesiones de trabajo en grupo sobre las diferentes temáticas cubiertas, *más* una sesión final de presentaciones. Los temas que se cubrieron incluyeron los ritmos Euclidianos, la regularidad máxima en términos de ritmo y melodía, el software Rubato Composer® y su base teórica de la teoría de categorías (Milmeister, 2009), aspectos de teoría de grupos y las transformaciones neo – Riemannianas, en particular la dualidad entre el grupo T/I y el grupo PLR (Crans, Fiore & Satyendra, 2009; Agust*ín et al.*, 2012), el teorema del hexacordo y la combinatoria en la pieza *Clapping Music* de Steve Reich (Haack, 1991).

4. La Enseñanza Interdisciplinaria Integrada

En junio de 2014 la División de Artes y Ciencias de GSU publicó una solicitación en la cual anunció que pronto los alumnos de las facultades de dicha división podrían obtener seis horas de créditos en el tiempo que habitualmente se tomaba para obtener tres. Esto se haría a través de un nuevo programa piloto llamado *Integrative Course Pairing* (Cursos integrados por parejas) que se lanzaría en la primavera de 2015. Cada curso de los dos involucrados estaría programado en el aula una vez a la semana con su respectivo profesor; para complementar las necesidades y requisitos de horas de ambos cursos se programarían clases magistrales por vídeo, lecturas asignadas y tareas interactivas en línea para las dos materias.

Para justificar la integración de los cursos de *teoría matemática de la música* del Departamento de Matemáticas y Estadística y de *análisis postonal* de la Escuela de Música se expusieron dos argumentos fundamentales, a saber:

Foro de Educación, v. 15, n. 22, enero-junio / january-june 2017, pp. 1-23.
e-ISSN: 1698-7802

1. Como los títulos de los cursos muestran, uno es teórico y el otro es analítico.
2. El análisis de la música postonal abarca diferentes estilos, cada uno de los cuales han sido enfocados matemáticamente. Por lo tanto, se planteó que cada estilo estudiado combinaría las técnicas del análisis musical con las matemáticas puras que lo subyaciesen.

Se explicó que, en particular, en el curso establecido de análisis postonal de la Escuela de M*úsica se concentra en la música escrita a partir de 1880.*La música moderna abarca una variedad de estilos y todos estos estilos han sido analizados de manera rigurosa en el contexto del auge de la teoría matemática de la música de las últimas décadas. La base de la integración sería el estudio de cada uno de dichos estilos y las matemáticas involucradas, tales como: la teoría musical de conjuntos, la cual incluye estructuras matemáticas como grupos; la teoría neo – Riemanniana y los toroidales que también emplean la teoría de grupos así como otras construcciones del álgebra moderna; geometrías no Euclidianas; la teoría serial y la combinatoria módulo 12.

Por otro lado, el curso de teoría matemática de la música del Departamento de Matemáticas y Estadística estudia las matemáticas que subyacen las estructuras y los patrones que resultan de la organización del material musical. Por ejemplo, aun la nota musical como unidad básica consiste en parámetros tales como altura, duración, inicio, volumen, timbre, etc. y una pieza musical está formada por notas, silencios y otros muchos elementos que aparecen en el pentagrama. Por este motivo la música presenta un tema rico y variado para el estudio y aun el desarrollo de ciertas áreas matemáticas, algunas de las cuales no siempre forman parte del plan de estudios general. La música postonal ha sido un área fértil para la creación de técnicas composicionales y de análisis que se alimentan de estos temas matemáticos.

Asimismo, en la propuesta del piloto se tuvo que explicar las razones por las cuales la integración de los dos cursos escogidos realzaría el compromiso de los estudiantes con el material. Como respuesta se explicó que la posibilidad de estudiar el análisis postonal desde múltiples ángulos complementarios llevaría, de manera natural, a una comprensión más profunda del tópico. Se enfatizó que los estudiantes de música no sólo aprenderían de manera mecánica las técnicas analíticas a su disposición, sino que también podrían llegar a comprender las matemáticas que las fundamentan. Esto, se argumentó, es especialmente importante cuando un principiante en este tipo de análisis se ve ante una pieza desconocida y no sabe cuál técnica analítica debe aplicarse. Para los estudiantes de matemáticas, la presentación habitualmente abstracta de temas específicos dentro de su carrera podría cobrar vida en el contexto de la teoría musical. De hecho, en el contexto de la teoría matemática de la música se puede «escuchar», por medio de ejemplos aurales, algunas de las operaciones y transformaciones matemáticas estudiadas.

También se expuso que otra ventaja de la participación en el formato y, en general, de tomar un curso de teoría matemática de la música para los estudiantes de matemáticas está relacionada con el hecho de que lleguen a estudiar ciertas herramientas y técnicas matemáticas que no siempre se cubren en los cursos tradicionales de la carrera. Por ejemplo, en la materia de álgebra moderna I, donde se estudia la teoría de grupos, no siempre se alcanza a cubrir las nociones de producto semidirecto o de producto corona, las cuales forman parte de una de las unidades del curso. Asimismo, deben aprender algunas de las construcciones básicas de la teoría de categorías y topos, tales como límites y colímites, en el contexto de las aplicaciones al análisis musical y de algunos de los procedimientos del software Rubato Composer®. De forma similar, los estudiantes de música tienen la oportunidad de conocer varios aspectos formales que informan la teoría postonal o el análisis de ritmo, un aspecto que usualmente se delega en los cursos de teoría musical.

En el Apéndice I se incluye la calendarización conjunta de los dos cursos. Aunque cada curso podía entenderse por sí solo y, de hecho, poseía su propio programa, el uso y explicación de las matemáticas involucradas en el análisis y la ejemplificación musical fue lo que hizo que los dos cursos se integrasen. De hecho, la enseñanza interdisciplinaria y la integración de los cursos permitieron que los estudiantes de música entendiesen la intención matemática y que los estudiantes de matemáticas experimentasen la miríada de aplicaciones que tiene su teoría. Por supuesto, esta última afirmación debe corroborarse con datos arrojados de la investigación objetiva. El proyecto final consistió en la composición de una pieza atonal en uno de los estilos estudiados, conjuntamente con la inclusión de estructuras explícitamente sujetas al análisis matemático. Fue dicho proyecto la base que se usó en el presente trabajo para detectar las características precisas de la colaboración que contribuyeran al realce de los procesos de aprendizaje y enseñanza en ambas disciplinas. El proyecto consistía de dos partes, a saber:

1. Se pidió al alumno a tomar un área de las matemáticas empleadas en la teoría matemática de la música y relacionarla con el análisis concreto de un compositor en, por lo menos, una de sus piezas.

2. Se pidió que cada alumno compusiera una pieza y, a la vez, que la analizara musicalmente, basándose en las matemáticas relevantes al estilo o combinación de estilos que hubiera escogido.

Foro de Educación, v. 15, n. 22, enero-junio / january-june 2017, pp. 1-23.
e-ISSN: 1698-7802

5. Método

Aunque hay múltiples marcos conceptuales relacionados con la educación matemática y con la enseñanza de la música, la naturaleza de la integración de dos cursos, uno de matemáticas y otro de música, para un estudiantado procedente de ambas áreas, no tiene antecedentes precisos en términos de medición. Quedaría por un trabajo futuro analizar los exámenes y otros indicadores de adquisición de conocimiento en las dos áreas. El presente trabajo se concentra en los cuatro proyectos finales de cuatro participantes, a saber, dos estudiantes de música, uno de licenciatura y uno de posgrado, más dos estudiantes de matemáticas, ambos de posgrado. Partes relevantes del trabajo de dos estudiantes representativos, uno de matemáticas y otro de música, se incluyen como figuras en el texto para ilustrar el análisis y explicaciones que se presentan. Otra composición anotada de un tercer estudiante está en el Apéndice II.

Las entrevistas a los cuatro estudiantes, las cuales se llevaron a cabo el día de la presentación de su conferencia – concierto y que fueron vídeograbadas, servirán de fuente para el análisis cualitativo. De hecho, el análisis gira en torno a la respuesta a interrogantes específicas que fueron diseñadas para arrojar luz sobre las siguientes preguntas de investigación:

1. ¿Llegaron los estudiantes de música a dominar, dentro de lo razonable, las técnicas y los conceptos matemáticos impartidos?
2. ¿Llegaron los estudiantes de matemáticas a dominar, dentro de lo razonable, las técnicas y los conceptos del análisis musical postonal impartidos?
3. ¿Cuál era el aspecto que más preocupaba a los estudiantes de cara a tomar un curso fuera de su disciplina, por medio de la integración?

Las preguntas específicas se presentan a continuación. Cabe recalcar que en el transcurso de las entrevistas las interrogantes se fueron moldeando al giro que les daban los propios entrevistados y que las preguntas tienen una naturaleza de sondeo y no fueron diseñadas para ser rígidas.

1. ¿Cuál es el aspecto que más te preocupaba cuando te inscribiste en este proyecto piloto de enseñanza integrada?
2. ¿Cómo te sentiste cuando viste que el prefijo de uno de los cursos era o MAT o MUS y que realmente estarías tomando un curso avanzado en un área aparentemente lejos de tu campo?

3. ¿Por qué escogiste la técnica o técnicas matemáticas que incorporaste a tu composición musical? ¿Decidiste por el estilo musical en función de los aspectos matemáticos o viceversa?
4. Menciona por lo menos un concepto matemático y un aspecto de la música postonal que contribuyeron a tu crecimiento como matemático/músico. Si no hubo nada de la disciplina ajena, también explica porque no funcionó este piloto para ti.

El análisis de las respuestas se hace en el contexto del enfoque semiótico, EOS, (Godino, Batanero & Font, 2007; Godino & Font, 2007) y, en particular, en el empleo de la dualidad *personal – institucional* que ellos plantean en su teoría multifacética. Este marco teórico se ha desarrollado específicamente para la didáctica de las matemáticas y, de su miríada de categorías útiles para el análisis, se ha escogido dicha dualidad más el concepto de *función semiótica.* Se describirá brevemente en qué consisten estas categorías y, para una noción completa de este marco de referencia tan ubicuo, se remite el lector a las referencias.

El aspecto de la dualidad personal – institucional es relevante al presente trabajo. Según el enfoque ontosemiótico se debe entender el aprendizaje de un concepto desde dos puntos de vista. Es decir, el aprendizaje puede ser visto como un proceso mental con toda su complejidad cognitiva o se puede ver y evaluar como una serie de competencias las cuales, si utilizadas correctamente en diferentes contextos, muestran aprendizaje.

La función semiótica se define como una relación entre una expresión y un contenido establecida por «alguien» según ciertas reglas de correspondencia (Godino & Batanero, 1997) y tiene la ventaja de no segregar un objeto de su representación. Hay tres tipos de funciones semióticas, a saber: representacional (un objeto se sustituye con otro), instrumental (un objeto es empleado como instrumento por otro objeto) y estructural (dos objetos o más conforman un sistema del cual emergen nuevos objetos).

Una expresión en el contexto de una función semiótica puede ser el contenido en el contexto de otra. Como ejemplo, en una función semiótica representativa, un sólido presentado geométricamente podría ser la expresión y la formulación de la integral doble sería el contenido; por otro lado, en una función semiótica instrumental la expresión podría ser la integral doble y el contenido la respuesta numérica (Montiel *et al.*, 2009). La noción de conflicto semiótico (Mayén, Díaz & Batanero, 2009) también es útil en cualquier estudio cualitativo realizado en torno al aprendizaje de las matemáticas y ocurre cuando la interpretación de las expresiones de la función semiótica del estudiante a manera personal no concuerda con lo que se espera institucionalmente.

6. Algunos resultados

Para ilustrar cómo enfocamos el análisis referente a las preguntas de investigación 2 y 3, vamos a tomar el trabajo de dos estudiantes, uno de música y otro de matemáticas, como representativos. Por motivos de espacio y por la naturaleza de este artículo estos ejemplos serán suficientes para transmitir el patrón de análisis realizado. Se incluye el ejemplo del estudiante 3 en el apéndice. El estudiante 1 era de matemáticas. Figuras 1, 2 y 3 representan los movimientos 1, 2 y 3 de su composición en el estilo de Anton Webern. Un hecho curioso y a manera de anécdota es que, mientras los dos estudiantes de música enfatizaron cómo el curso les había acercado a la música postonal y les había permitido apreciar su elaboración de manera más familiar, el estudiante 1 de matemáticas dijo de antemano que la música postonal era su música favorita y la que más escuchaba.

Si se fija en las figuras (aun sin ahondar en la teoría musical de conjuntos enseñado en el curso de análisis postonal, donde el libro de texto era el *Anthology of Post – Tonal Music* (Roig –Francolí, 2007), se puede apreciar que estudiante 1 estaba empleando el lenguaje de análisis musical. De hecho podemos ver las figuras como ejemplos de funciones semióticas representacionales, donde el lenguaje de la teoría musical de conjuntos es la expresión y el contenido es la traducción de este lenguaje al de las matemáticas, con sus transformaciones en términos de rotaciones, traslaciones y órbitas.

Figura 1

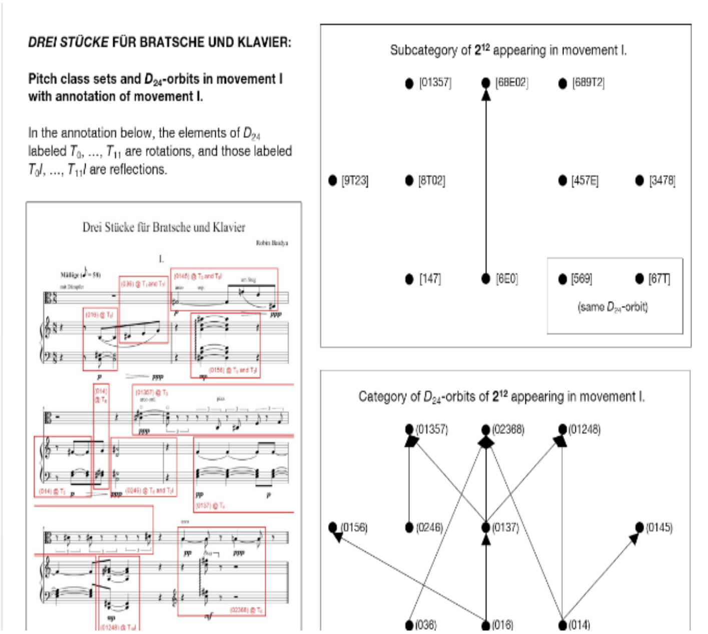


Figura 2

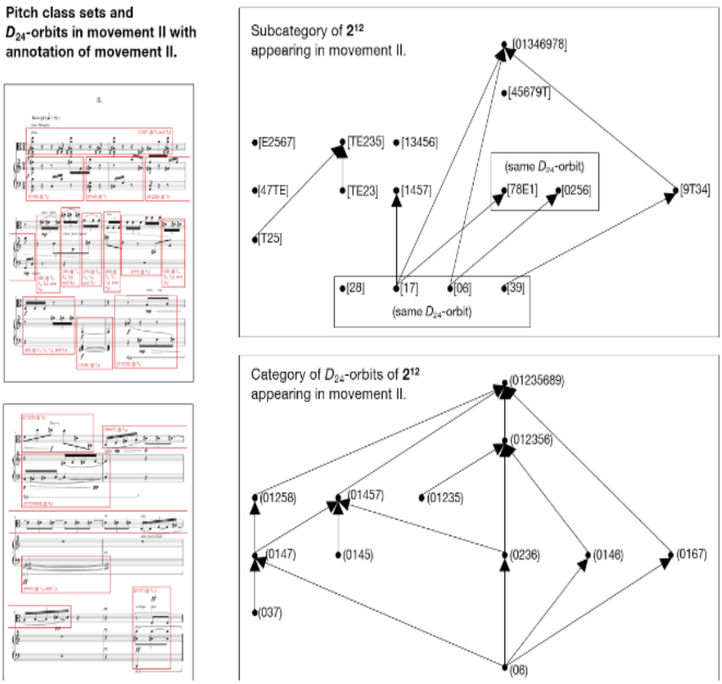
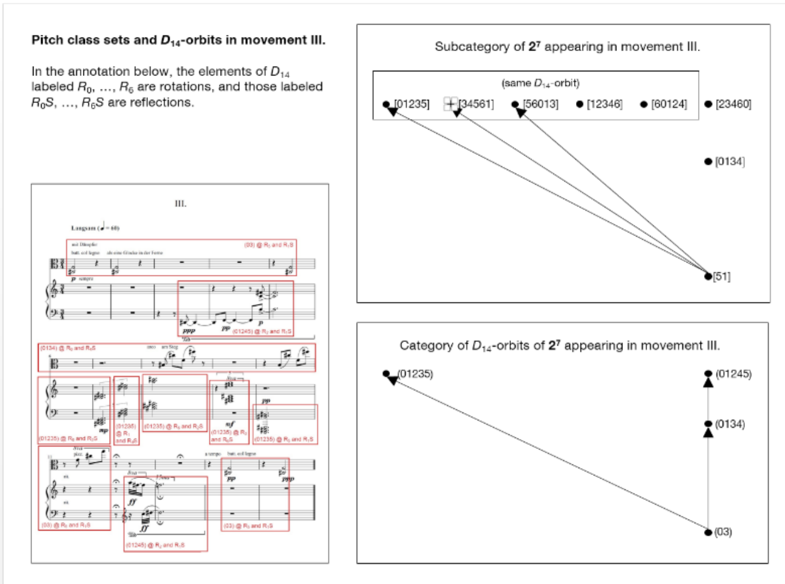


Figura 3



En particular, estudiante 1 creó del lenguaje musical del análisis postonal y del lenguaje matemático de la teoría de grupos y la teoría de conjuntos un nuevo lenguaje que, aunque basado en el lenguaje y los conceptos institucionales para las dos áreas, resultó ser un lenguaje personal hasta que, en un momento futuro, fuera a ser «institucionalizado». A final de cuentas, esta ha sido la historia del desarrollo de las matemáticas y de la teoría musical como temas académicos, ya que sin el aspecto personal no habría avance. Por supuesto estamos hablando aquí de un estudiante excepcional y versado en lo institucional perola dualidad personal – institucional debe tomarse como un criterio esencial al momento de evaluar el proceso de adquisición de las nociones y del lenguaje matemáticos dado lo que, en un momento, puede representar una falta de comprensión, en otro contexto podría llevar a la buscada competencia institucional.

A continuación reproducimos un trozo de la explicación de estudiante 1 en torno a figura 1, en que se puede apreciar claramente el uso de las expresiones y contenidos de las funciones semióticas.

> *Los conjuntos de altura literales* son, simplemente, los subconjuntos de $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ = {0, 1, 2,…, 9, T, E}.Los elementos se enlistan habitualmente de una manera especial conocida como la *forma normal* del conjunto, la cual se calculan según un algoritmo. Por ejemplo, la forma normal del conjunto {0, 6, E} es [6E0]. *La inclusión literal de subconjuntos* se refiere a la inclusión de subconjuntos en el sentido usual. Por ejemplo, [6E0] es un subconjunto literal de [68E02].

> *Los conjuntos de altura abstractos* son las órbitas del conjunto potencia de $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ bajo la acción de D_{24} (el grupo de doce reflexiones y doce traslaciones). *La inclusión abstracta de subconjuntos* se define de la siguiente manera: Sea X^* y Y^* conjuntos abstractos con representantes literales X e Y, respectivamente. Entonces X^* es un conjunto abstracto de Y^* si y sólo si existe un elemento F de D_{24} tal que FX es un subconjunto literal de Y. Por ejemplo, (016) es un conjunto abstracto de (02368) dado que T_2 [016] = [238] y [238] es un subconjunto literal de [02368].

Como se puede apreciar, el lenguaje es muy formal en términos matemáticos y, como veremos en el siguiente párrafo, contrasta con el estudiante 2, de música. Para finalizar este acercamiento a la composición del estudiante 1, vemos su explicación de la figura 1.

> En la figura las clases de conjuntos de altura literales están dentro de las cajas rojas. Cada clase de conjunto de altura literal X se indica tanto por el conjunto de altura abstracta Y al cual pertenece y por los elementos de D_{24}que llevan X al conjunto que caracteriza la forma prima de Y. Por ejemplo, el conjunto literal[6E0] se marca tanto por la forma prima de su conjunto abstracto (016) como por la reflexión T_0Ique transforma [6E0] a [016].

Estudiante 2 era de composición musical y su trabajo se muestra en las figuras 4 y 5. A continuación se presentará su explicación para después intentar ubicar las funciones semióticas y los tipos de significados más relevantes.

Figura 4

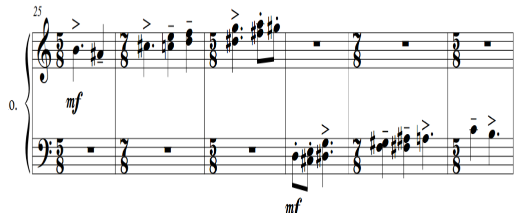
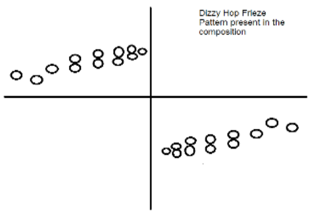


Figura 5



Comenzando por el compás 25, la pieza emplea una clara transformación matemática. Se crea una inversión retrógrada en la voz inferior a manera de respuesta al compás 25. En terminología matemática, la inversión retrógrada es una rotación. Como esta rotación ocurre en el tiempo, las notas no se rotan ni se reflejan en torno a un centro o eje fijos. De hecho, el resultado es una reflexión DE la reflexión.

Las funciones semióticas del estudiante 2 parecen conectar la expresión musical y el contenido matemático de manera más directa que las del estudiante 1. Esto es comprensible, ya que el nivel de formalización del lenguaje matemático era mucho más relajado y su relación con las transformaciones geométricas, los diferentes frisos en un contexto musical (Hart, 2009) era mucho más intuitiva. A diferencia por supuesto de los investigadores del campo de la teoría matemática de la música, es relativamente fácil distinguir el lenguaje y las funciones semióticas en sí entre los estudiantes de matemáticas y los de música. Sin embargo y a manera de anécdota, el día de la conferencia concierto de los cuatro estudiantes seleccionados uno de los responsables administrativos de los proyectos pilotos de la integración interdisciplinaria comentó que había intentado distinguir entre los estudiantes de música y de matemáticas por su lenguaje y que no había podido.

Por supuesto, el área académica de esta persona no tenía relación con ninguna de las dos, ya que era del departamento de inglés.

Si se analiza la siguiente frase del estudiante 2, «en terminología matemática la inversión retrógrada es una rotación», se puede entender la utilidad de las funciones semióticas ya que, en su relativa sencillez, dicha frase es el paradigma de una función semiótica estructural. Es cierto que los dos objetos, la muy musical *inversión retrógrada* y la muy matemática *rotación* podrían verse como la expresión y el contenido de una función semiótica representacional. Sin embargo, vistos como una totalidad y en contexto, es evidente que estos dos objetos (y realmente son dos objetos abstractos diferentes, aunque isomorfos como grupos – lo cual los estudiantes tuvieron que probar) se fusionan en un nuevo sistema del cual emerge un objeto nuevo, a saber, la pieza musical concreta representada por su partitura. Este nuevo objeto, como observa el estudiante 2, ocurre en el tiempo y, por lo mismo también reviste una complejidad matemática que él vislumbra cuando dice que «las notas no se rotan ni se reflejan en torno a un centro o eje fijos».

La pregunta de investigación número 3, la cual se relaciona con lo que más les preocupaba a los estudiantes al inicio de este experimento en la integración interdisciplinaria de los cursos, tenía un doble propósito. Es evidente que los estudiantes contestaron las preguntas 1 y 2 de la entrevista colectiva al final de la experiencia en el contexto de su conferencia concierto. Mientras que, por supuesto, es posible que sus respuestas en torno a un estado psicológico de cuatro meses antes no sean del todo confiables, tenían la posibilidad de contestar lo que recordaban y, a la vez, matizar con el conocimiento de lo que realmente sucedió en el transcurso del semestre.

Estudiante 3, de composición musical, elaboró de manera ilustrativa su contestación a las preguntas 1 y 2 del cuestionario (relacionadas con dicha pregunta de investigación número 3) Enfatizó que, aun y cuando tenía una cierta familiarización con el material debido a su participación en el viaje de estudios a Shanghái, fue fuerte el tener que inscribirse en un curso de matemáticas de nivel superior en la catalogación universitaria. No obstante, comentó ampliamente que, para su propia sorpresa, donde más había crecido era en el aspecto musical, en vista de que por la primera vez podía realmente asimilar la música postonal y atonal como un lenguaje familiar y comprensible. Se reproduce uno de sus comentarios a continuación:

> Las matemáticas no fueron la parte más ajena de los cursos para mí, sino la música tan abstracta. Con las técnicas matemáticas y la comprensión de los conceptos por medio de las explicaciones matemáticas, vi que esa música abstracta no era tan abstracta porque adquirí un conjunto de herramientas para poder analizarla y entenderla.

Estudiante 2, también de composición musical como hemos visto arriba, afirmó que al principio le tenía temor a la parte matemática, dado que su experiencia con las matemáticas formales se paró en el primer curso de cálculo. No obstante y en sus propias palabras:

> Vi que las herramientas no eran tan abstractas, no necesitabas todo el vocabulario y formalidad que tienen los matemáticos. Los conceptos eran profundos, pero fueron impartidos de tal forma que no necesitases todas las fórmulas y pruebas para poder entenderlos; los matemáticos iban por ese lado porque les gusta, pero no era necesario para sacar provecho del curso. Un músico tiene una mente acostumbrada a los cálculos, el proceso no es tan diferente. Ahora tengo más herramientas para mis propias composiciones.

El estudiante 4, de matemáticas, planteó que nunca había tenido contacto con la música postonal ni con la terminología de la música clásica. Sin embargo, su comentario fue similar al del estudiante 2, cuando expresó que: «no sabía la terminología pero sí me quedaba claro lo que tenía que hacer. Poco a poco me fui adentrando en la parte formal y ahora este tipo de música, que me era totalmente desconocida y poco atractiva, me parece perfectamente lógica y me produce placer estético». Como se recordará, las preguntas 3 y 4 de la entrevista se relacionan con el aprendizaje y uso de los conceptos matemáticos y musicales. Las respuestas realmente están integradas en las explicaciones que daban los estudiantes en torno a sus composiciones finales, ya que cada uno abundaba sobre los conceptos que había empleado y, en el acto, revelaba la aportación tanto de la disciplina «ajena» como de la propia. No hubo ningún estudiante que alegara que no hubiese aprendido conceptos nuevos o que la profundización en el contenido matemático no le hubiera servido para entender el análisis postonal. Tanto los estudiantes de matemáticas como los de música enfatizaron el realce de su comprensión y disfrute de la música postonal como resultado del piloto. En lo tocante a la pregunta 4, como era de esperar, cada uno mencionó las técnicas y los conceptos relacionados con los aspectos específicos que había usado en su composición. Por ejemplo el estudiante 2, que había empleado las matrices dodecafónicas de Schönberg en su pieza, mencionó dicha técnica para la pregunta dirigida a la música postonal y, para su concepto matemático adquirido, escogió los patrones de frisos.

En lo concerniente a la pregunta *¿decidiste por el estilo musical en función de los aspectos matemáticos o viceversa?* no hubo un claro consenso. Por un lado, el estudiante 2 (de música) hizo su pieza en dos partes, la primera basada en la técnica musical de matrices dodecafónicas y la segunda basada en las matemáticas de la geometría de transformaciones rígidas y los patrones de frisos. Por otro lado, el estudiante 4 (de matemáticas) tomó un solo conjunto de altura de tonos, [016]

Foro de Educación, v. 15, n. 22, enero-junio / january-june 2017, pp. 1-23.
e-ISSN: 1698-7802

según la notación de la teoría musical de conjuntos, como la piedra angular única en la construcción de sus ideas melódicas, armónicas y rítmicas. Una vez escogido dicho conjunto de altura de tonos, utilizó las transformaciones matemáticas para generar su obra y después buscó y clasificó los resultados con la terminología del análisis musical.

Aparte de los exámenes y tareas semanales, que proveían la forma de aquilatar las competencias institucionales que usualmente equiparamos con aprendizaje y conocimiento, se dedicó más tiempo que lo habitual de parte de los dos profesores en el intento de descifrar los significados personales, cognitivos, de los alumnos, en particular de los que se hallaban en el campo ajeno. La evaluación fue muy personalizada, ya que no se esperaba que los estudiantes de música tuviesen los antecedentes para poder realizar ciertas tareas o contestar algunas de las preguntas de examen y así se planteó desde un principio. Desde el lado musical la situación fue un poco diferente, ya que para adquirir las herramientas del análisis postonal no se requieren las cuatro teorías musicales previas que son obligatorias para los estudiantes de música. Se les pedía a los estudiantes de matemáticas un conocimiento muy básico de la lectura del pentagrama en clave de sol y, por lo demás, dichos estudiantes de hecho tenían ciertas ventajas en lo tocante a la parte analítica. Por supuesto, muchos de los estudiantes de música conocían y ejecutaban piezas postonales y, por lo mismo, estaban más familiarizados con el sonido de este tipo de música pero, según la indagación previa al comienzo de los cursos, ninguno tenía conocimiento de las técnicas desarrolladas para analizar su estructura.

7. Conclusiones

Este reporte tocante al experimento piloto sobre la enseñanza interdisciplinaria integrada a nivel universitario en las áreas de matemáticas y música puede entenderse desde varias perspectivas. Por un lado está el planteamiento de «dos cursos en uno» que, mientras podría ser atractivo para el estudiante que quisiera acumular créditos con más rapidez, también podría tener efectos nocivos sobre la calidad de la enseñanza y el aprendizaje si no se tratase con profesionalismo y creatividad en la entrega. Por otro lado está la integración en sí de las áreas de matemáticas y música. En otras secciones de este trabajo se ha explicado con minuciosidad los antecedentes, el contenido y la lógica de este emparejamiento, que ha probado ser exitoso a nivel universitario y en la preparación de maestros de nivel secundario (Kovachi, 2014; Hall, 2014; Hughes, 2014; Chahine & Montiel, 2015).

El experimento piloto sobre el cual se reporta fue un éxito en términos institucionales. Los estudiantes mostraron un dominio de las competencias planteadas al principio de los cursos y, ante los creadores del proyecto interdisciplinario, el dominio de la «otra» área fue palpable en el caso de los cuatro estudiantes que participaron en la conferencia concierto. El apoyo con actividades y tareas en línea, así como la videograbación de todas las clases magistrales, no sólo compensaron el tiempo en el aula, sino que realzaron de manera positiva el proceso. Se reconoce que, en este último caso, la afirmación se basa en la comparación con cursos previos de análisis postonal y teoría matemática de la música, enseñados por separado y de manera tradicional por ambos profesores.

En términos de los aspectos personal y cognitivo no se puede afirmar el mismo nivel de éxito de manera taxativa, ya que se necesitaría un estudio más longitudinal en torno al uso posterior y retención de los conceptos y técnicas considerados claves de ambas áreas. No obstante, esto último es común a la medición de cualquier tipo de conocimiento, ya que la evaluación de la manera personal de adquirir, asimilar y retener nociones y técnicas requiere de estudios especiales mientras que la evaluación institucional, que se basa en competencias, es parte de lo establecido en el contexto académico.

La otra pregunta lógica que surge es, por más que se vieran resultados positivos y las motivaciones exóticas hubiesen provocado el enganche de los estudiantes, ¿qué tan factible y generalizable es el modelo desarrollado? Es evidente que se necesitan condiciones especiales, entre ellas un profesorado versado en la teoría matemática de la música. De ninguna forma se pregona una implementación masiva del modelo, lo cual llevaría a su caricaturización. Por otro lado, donde se encuentren académicos de ambas disciplinas involucrados en la investigación en torno a la teoría matemática de la música, un fenómeno que sí existe y va en auge, el diseño de cursos y proyectos integrativos de esta índole, así como de materiales de divulgación, deben ser fomentados y apoyados.

Parece que este tipo de integración multidisciplinaria, en particular la combinación de matemáticas y música, se presta de manera natural al análisis que emplea la noción de función semiótica (Godino & Batanero, 1997). La relación entre la expresión y el contenido contiene múltiples niveles, tanto dentro de cada disciplina como en el aspecto interdisciplinario. Este análisis puede hacerse por medio de la recopilación verbal, escrita o gestual como se puede apreciar en la sección de análisis. El proceso de análisis y clasificación de las funciones semióticas arrojaron mucha información que, a la postre, era útil para poder contestar la escala para el proyecto culminante, incluida en el Apéndice III, una tarea obligatoria para los profesores involucrados en el proyecto piloto de enseñanza multidisciplinaria integrada.

8. Referencias

Aceff-Sánchez, F., Agustín-Aquino, O.A., Lluis-Puebla, E., Montiel, M., & du Plessis, J. (2012). *An Introduction to Group Theory. Applications to Mathematical Music Theory.* Bookboon Ventus publishing. Recuperado de: http://bookboon.com/en/textbooks/mathematics/an-introduction-to-group-theory

Andreatta, M. (2012). *On two open mathematical problems in music theory: Fuglede spectral conjecture and discrete phase retrieval*. Recuperado el 29 de junio de 2016, de: http://repmus.ircam.fr/_media/moreno/algebraseminar_dresden_andreatta_nov2012_.pdf

Bensen, D. (2006). *Music a Mathematical Offering.* Londres: Cambridge University Press.

Chahine, I., & Montiel, M. (2015). Teaching Modeling in Algebra and Geometry Using Musical Rhythms: Teachers' Perceptions on Effectiveness. *Journal of Mathematics Education, 8*(2), 126-138.

Clough, J., & Myerson, G. (1985). Variety and multiplicity in diatonic systems. *Journal of Music Theory*, *29*(2), 249-270.

Cohn, R. (2016). Variety and multiplicity in diatonic systems. *Journal of Music Theory. Meeting Abstract Issue*, *37*(2).

Crans, A., Fiore, T., & Satyendra, R. (2009). Musical actions of dihedral groups. *American Mathematical Monthly*, *116*(6), 479-495.

Dartmouth College. (2002). *Mathematics Across the Curriculum Bookshelf.* Recuperado el 21 de julio de 2016, de: https://math.dartmouth.edu/~matc/

Demaine, E., Gómez, F., Meijer, H., Rappaport, D., Taslakian, P., Toussaint, G.T., Winograd, T., & Wood, D.R. (2009). The Distance Geometry of Music. *Computational Geometry: Theory and Application*, 42, 429-454.

Douthett, J., & Krantz, R. (2007). Maximally Even Sets and Configurations: Common Threads in Mathematics, Physics, and Music. *Journal of Combinatorial Optimization*, 14, 385-410.

Fiore, T. (2006, 2007, 2009). Contenidos de cursos y proyectos estudiantiles del programa REU (Research Experience for Undergraduates) de la Universidad de Chicago. Recuperado de: http://www-personal.umd.umich.edu/~tmfiore/1/music.html

Godino, J.D., & Batanero, C. (1997). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area for research in mathematics education. In Sierpinska A., & Kilpatrick, J. (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A search for Identity* (pp.177-195). Dordrecht: Kluwer, A.P.

Godino, J.D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127-135.

Godino, J.D., & Font, V. (2007) *Algunos desarrollos y aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas.* Recuperado el 21 de julio de 2016, de: http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm

Gómez, F. *Matherhythm*. Recuperado el 18 de octubre de 2016, de: http://www.webpgomez.com/artes/contrasteatro-contrastheatre/396-matherhythm-or-rhythm-is-a-killer-eng

Haack, J.K. (1991). Clapping Music-A Combinatorial Problem. *The College Mathematics Journal*, *22*(3), 224-227.

Hall, R. (2014). Acoustics labs for a general education math and music course. *Journal of Mathematics and Music*, *8*(2), 125-130.

Hart, V. (2009). Symmetry and transformations in the musical plane. In Kaplan, C., & Sarhangi, R. (Eds.), *Proceedings of Bridges 2009: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture* (pp. 169-176). Londres: Tarquin Publications.

Hughes, J. (2014). Creative experiences in an interdisciplinary honors course on mathematics in music. *Journal of Mathematics and Music, 8*(2), 131-144.

Johnson, T. (2008). *Foundations of Diatonic Theory: A Mathematically approach to Music Fundamentals.* Lanham: Scarecrow Press.

Johnson, T. (2013). *Challenges and Rewards of Teaching Math-Music to Different Populations*. Charlotte: Society for Music Theory in Charlotte.

Jones, A. (2016). Geometry, consonance, and the non-specialist: Pedagogical interdisciplinary and math/music undergraduates, Spring Southeastern Sectional Meeting, Special Session on Mathematics and Music. *Journal of Music Theory. Meeting Abstract Issue, 37*(2).

Kovachi, J. (2014). Musica speculative for the twenty-first century: integrating mathematics and music in the liberal arts classroom. *Journal of Mathematics and Music, 8*(2), 117-124.

Mayén, S., Díaz, C., & Batanero, C. (2009). Conflictos semióticos de estudiantes con el concepto de mediana. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 8*(2), 74-93. Recuperado el 21 de julio de 2016, de: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362009000200002.

Mazzola, G. (2016). *Encyclospace.* Recuperado de: http://www.encyclospace.org/

Milmeister, G. (2009). *The Rubato Composer Music Software: Component-Based Implementation of a Functorial Concept Architecture*. Berlín: Springer-Verlag, Montiel, M. *Mathematical Music Theory in Shanghai.* Recuperado el 7 de julio de 2016, de: https://www.youtube.com/watch?v=HiNd3e3UnMc

Montiel, M., Wilhelmi, M., Vidakovic, D., & Elstak, I. (2009). Using the Onto-Semiotic Approach to Identify and Analyze Mathematical Meaning when Transiting between Different Coordinate Systems in a Multivariate Context. *Educationa Studies in Mathematics*, *72*(2), 139-160.

Montiel, M., & Gómez, F. (2014). Music in the pedagogy of mathematics. *Journal of Mathematics and Music, 8*(2), 151-166.

Noll, T. (2014). Getting involved with mathematical music theory. *Journal of Mathematics and Music, 8*(2), 167-182.

Peck, R. (2014). Mathematical music theory pedagogy and the «New Math». *Journal of Mathematics and Music, 8*(2), 145-150.

Roig-Francolí, M.A. (2007). *Anthology of Post-Tonal Music.* Nueva York: McGraw-Hill Education.

Toussaint, G. (2013). *The Geometry of Musical Rhythm.* Londres: Chapman and Hall/CRC.

Wallace, D. (2000). Mathematics Across the Curriculum at Dartmouth. *Focus. The Newsletter of the Mathematical Association of America*, *20*(3), 6-7.

Apéndice I

Calendarización

Post-Tonal Analysis – Mathematical Music Theory Schedule Spring 2015

Students will be expected to have read the chapter under consideration before it is first introduced in lecture (see the schedule below). Blue is for mathematical music theory and brown is for postonal analysis.

Date	**Topic**	**Primary Source**	**Relevant** **Examples in Music (to be specified)**
Week 1 January 12 & 14	***Applications of Group Theory: Transformational Theory*** T/I, PLR groups ***Neo-Riemannian Theory***: PLR & SCP	Agustín, O., du Plessis, J., Lluis-Puebla, E. & Montiel, M. (2012). *An Introduction to Group Theory with Applications to Mathematical Music Theory,* ***Chapter 4***. Bookboon, Ventus publishing, Online at: http://bookboon.com/en/textbooks/mathematics/an-introduction-to-group-theory Adrian Childs, «Moving Beyond Neo-Riemannian Triads: Exploring a Transformational Model for Seventh Chords» *Journal of Music Theory* 42, no. 2 (1998), 181-193.	Brahms Concerto for Violin and Cello
Week 2 January 21	***Applications of Group Theory Cont'd; Duality of Contextual Groups.***	Same as above. Fiore, T. & Satyendra, R. *Generalized Contextual Groups* *Music Theory Online* Volume 11, Number 3, August 2005	Chopin Prélude in C# minor, Op. 45

Week 3 January 26 & 28	***Spatial Relations and Musical Structures; Interval Patterns and Musical Structures*** ***Pitch Centricity and Composition with Motivic Cells***	Johnson, Timothy, *Foundations of Diatonic Theory: A mathematical approach to Music Fundamentals,* The Scarecrow Press, 2008 Textbook Chapter 1	Debussy, «La cathédrale engloutie»
Week 4 February 2 & 4	***Continuation*** ***Pitch Centricity and Symmetry***	Same as above. Textbook Chapter 2	Bartók, «Song of the Harvest»
Week 5 February 9 & 11	***Maximal Evenness in Rhythm; Chains, Necklaces and Partitions; Mathematical Features for Recognizing Preference in Sub-Saharan Rhythms.***	Keith, Michael, *From Polychords to Polya: Adventures in Musical Combinatorics,* ***Chapter 2,3.*** Vinculum Press, Princeton, N.J, 2001 Toussaint, Godfried *The Euclidean Algorithm Generates Traditional Musical Rhythms* Stephen Andrew Taylor, *Hemiola, Maximal Evenness, and* *Metric Ambiguity in Late Ligeti* *Contemporary Music Review Vol. 31, Nos. 2–3, April–June 2012, pp. 203–220*	Ligeti various
Week 6 February 16 & 18	***Continuation*** ***Introduction to Pitch-Class Set Theory***	Same as above. Textbook Chapter 3	Schoenberg Sech Kleine Klavierstücke

Week 7 February 23 & 25	***Symmetry and Transformations in Music*** ***Continuation***	***Assorted materials on finite isometry groups, frieze and wallpaper groups;*** Hart, Vi, ***Symmetry and Transformations in the Musical Plane,*** **Proceedings of Bridges 2009: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture (2009) 169–176** Same as above	Messiaen, «Le Collier«
Week 8 March 2 & 4	***Rubato Composer;*** ***Forms and Denotators*** ***Continuation***	Milmeister, Gérard, *The Rubato Composer Music Software: Component-Based Implementation of a Functorial Concept Architecture,* Springer-Verlag, 2009, ISBN: 978-3-642-00148 **Chapters 1-5, 15,16.** **Download Software** **Same as above**	Webern Vier Stücke für Streichquartet
Week 9 March 9 & 11	***Rubato Composer*** ***Analyzing Atonal Music***	Guest Lecture Session: Dr. Guerino Mazzola Textbook Chapter 4	Berg, Piano Sonata Op. 1
March 18	**Spring Break**		

Foro de Educación, v. 15, n. 22, enero-junio / january-june 2017, pp. 1-23.
e-ISSN: 1698-7802

Week 10 March 23 & 25 **Midterm**	***Signature Transformations;*** ***Midi Solfa Mode-go-Round; Spelled Heptachords; Geometric focus*** ***Continuation*** ***Signature Transformations, Spelled Heptachords.*** ***Midterm #2***	Hook, Julian, ***Signature Transformations*** p.137-160 *Music Theory and Mathematics, Eastman Studies in Music Series.* Noll, Thomas ***Theory:*** https://sites.google.com/site/solfamodegoround/theory Hook, Julian,*Spelled Heptachords, Proceedings from Third International Conference, MCM 2011, IRCAM.* Tymoczko, Dimitri, *Geometry and the Quest for* *Theoretical Generality, Journal of Mathematics and Music, 2013* *Vol. 7, No. 2, 127–144,* *Assorted Articles.*	
Week 11 March 30 & April 1	***Continuation*** ***Twelve-Tone Music I: An Introduction***	Same as above. Textbook Chapter 7	Schoenberg Suite Op. 25

Week 13 April 6 & 8	***Algebraic Combinatorics on Words*** ***Twelve-Tone Music II: Invariance, Symmetry and Combinatoriality***	Berstel, Lauve, Reutenauer,Saliola *Combinatorics on Words:* *Christoffel Words and Repetitions in Words* Noll, T. *Sturmian Sequences and morphisms: A Music:Theoretical Application* *Journ´ee annuelle* 2008, p. 79 – 102 Noll & Clampitt *Modes, The Height-Width Duality and Handschin's Tone Character* *Music Theory Online* Textbook Chapter 8	Schoenberg Streichquartet #4
Week 14 April 13 & 15	***Continuation*** ***Algebraic Combinatorics on Words*** ***Serialism: Developments after 1945***	Textbook Chapter 9	Boulez, *Le Marteau sans Maître*
Week 15 Ap 20 22	***15 minute presentations***	Final Compositions	

Apéndice II

Composiciones Finales

Estudiante 3

Apéndice III

Escala para el proyecto culminante

Integrative Course Pair: Music and Mathematics
Drs. Mark McFarland (MUS 4460/6460) & Mariana Montiel (MATH 4998/8800)
Culminating Assignment Rubric

Integrative learning is an understanding and a disposition that a student builds across the curriculum and cocurriculum, from making connections among ideas and experiences to synthesizing and transferring learning to new, complex situations within and beyond the campus.

	Capstone (4)	Milestone (3)	Milestone (2)	Benchmark (1)
Connections to Experience: Connects relevant experience and academic knowledge	Meaningfully **synthesizes** connections among experiences outside of the formal classroom to **deepen understanding** of fields of study and to broaden own points of view.	Effectively **selects and develops** examples of life experiences, drawn from a variety of contexts to illuminate concepts/theories/frameworks of fields of study.	**Compares** life experiences and academic knowledge to infer differences, as well as similarities, and **acknowledge perspectives** other than own.	**Identifies** connections between life experiences and those academic texts and ideas **perceived as similar and related** to own interests.
Connections to Discipline: Recognizes and makes connections across disciplines	Independently creates wholes out of multiple parts (synthesizes) or draws conclusions by combining examples, facts, or theories from more than one field of study or perspective.	Independently connects examples, facts, or theories from more than one field of study or perspective.	When prompted, connects examples, facts, or theories from more than one field of study or perspective.	When prompted, **presents** examples, facts, or theories from more than one field of study.
Transfer: Adapts and applies skills, abilities, theories, or methodologies gained in one discipline to the other discipline	Adapts and applies, independently, skills, abilities, theories, or methodologies gained in one situation to new situations **to solve difficult problems or explore complex issues in original ways.**	Adapts and applies skills, abilities, theories, or methodologies gained in one situation to new situations to solve problems or explore issues.	Uses skills, abilities, theories, or methodologies gained in one situation in a new situation to contribute to understanding of problems or issues.	Uses, in a basic way, skills, abilities, theories, or methodologies gained in one situation in a new situation.
Integrated Communication: Produces work that can be valued and assessed in a way that shows ability to articulate the integrated learning objectives	Fulfills the assignment by choosing a format, language, and research in ways that enhance meaning, making clear the interdependence of language and meaning, thought, and expression.	Fulfills the assignment by choosing a format, language, and appropriate research to explicitly connect content and form, demonstrating awareness of purpose and audience.	Fulfills the assignment by choosing a format, language and appropriate research that connects in a basic way what is being communicated (content) with how it is said (form).	Fulfills the assignment in an appropriate form.
Music: Compose an original composition complete with analysis	Composes work and analysis that develops methodologies introduced in class to explore the material in an original light. Graphic analysis and composition performance also included.	Fulfills the assignment to display mastery of lecture material along with graphic analysis and performance of composition	Fulfills the assignment to display mastery of lecture material along with performance	Fulfills the assignment in an appropriate form